CONCOURS D'ENTRÉE À L'UCAC-ICAM

Mathématiques (2h)

Questions de type QCM

1. Sachant que pour tout $n \in N^*$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, on a : **(1 pt)**

a. $5^3 + 6^3 + \dots + 20^3 = 41000$
b. $5^3 + 6^3 + \dots + 20^3 = 42000$
c. $5^3 + 6^3 + \dots + 20^3 = 43000$
d. $5^3 + 6^3 + \dots + 20^3 = 44000$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overleftrightarrow{e_1}, \overleftrightarrow{e_2})$, soit le point $A(2i) et\ f$ l'application qui tout point $M(Z) associe\ le\ point\ M'(Z')$ tel que $Z' = \frac{2iZ-5}{Z-2i}\ si\ M \neq A$. **(1pt)**

a. f n'admet aucun point invariant

b. f admet un seul point invariant

c. f admet deux points invariants

d. f admet trois points invariants

3. Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et (u_n) la suite numérique de terme général $u_n = 2cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) avec\ n \in N$. On a : **(1 pt)**

a. $u_0 = 2$

b. $u_1^2 = u_0 + 2$

c. $u_0 \in [-1, 1]$

d. $u_0 = 2 \times (-1)^n$

4. On considère la fonction intégrale F définie pour tout réel x positif par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. $On\ a$:

(1 pt)

a. $\frac{1}{1+x^2} \le F(x) \le 1$

b. $\frac{x}{1+x^2} \le F(x) \le x$

c. . $\frac{x^3}{1+x^2} \le F(x) \le x$

d. $\frac{x^2}{1+x^2} \le F(x) \le x$

5. Le calcul de $\frac{\sin x}{\cos x + x^2}$ nous donne en résultat: **(1 pt)**

a. 0

b. -1

c. 1

d. $\frac{1}{2}$

6. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On en retire toutes ses boules, une à une, et au hasard. La probabilité P_n, d'extraire alternativement, une boule blanche, puis une boule noire, puis une boule blanche, puis une boule noire, et ainsi de suite est: **(1 pt)**

a. $P_n = \frac{1}{C_{2n}^n}$

b. $P_n = \frac{1}{C_{2n}^{n+1}}$

c. $P_n = \frac{1}{C_{2n}^{n-1}}$

d. $P_n = \frac{n}{C_{2n}^n}$

7. f est la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = x + 1 + 2e^{-x}$. **(1 pt)**

a. La courbe de f admet une branche parabolique de direction (OI)

b. La courbe de f n'admet pas de branche parabolique

c. La courbe de f n'admet d'asymptote

d. La courbe de f admet une asymptote

8. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$. f est une solution de l'équation différentielle suivante : **(1 pt)**

a. $y''(x) - xy'(x) = 0$

b. $y'(x) + y(x) = 2xe^{-x}$

c. $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$

d. $y'(x) - y(x) = x$

9. La fonction numérique f de la variable réelle x, définie par $f(x) = \frac{2\tan tan\, x}{x}$, est : **(1pt)**

a. définie pour $x =- \frac{5\pi}{2}$

b. continue en 0

c. dérivable en 0

d. prolongeable par continuité en 0

10. Une solution de l'équation complexe (E): $z^4 - \sqrt{2}\, z^2 - 1 + 2i = 0$ *est le nombre complexe*:
(1pt)

a. $Z = \frac{\sqrt{1-\sqrt{2}}}{2} + i\, \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$.

b. $Z = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} + i\, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$.

c. $Z = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

d. : $Z = \frac{\sqrt{1-\sqrt{2}}}{4} + i\, \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{4}$

11. On considère le système suivant dans R^4 : **(1pt)**

(S): $\{\frac{-2}{x+1} + y^2 + 4e^z + t = 20\ \frac{1}{x+1} + 3y^2 - 4e^z + 5t = 15\ \frac{7}{x+1} - y^2 + 6e^z - t = 40\ \frac{-1}{x+1} + 11y^2 + 2e^z +$

Le système (S) admet pour solutions :

a. les quadruplets $(-\frac{1}{2}, 1, \ln ln\, 2, 3)$ et $(-\frac{1}{2}, -1, \ln ln\, 2, 3)$

b. les quadruplets $(-\frac{1}{2}, 1, \ln ln\, 5\,, 3)$ et $(-\frac{1}{2}, -\ 1, \ln ln\, 5\,, 3)$

c. les quadruplets $(-\frac{1}{2}, 4, \ln ln\, 5\,, 1)$ et $(-\frac{1}{2}, -\ 4, \ln ln\, 5\,, 1)$

d. les quadruplets $(-\frac{1}{2}, 5, \ln ln\, 2\,, 3)$ et $(-\frac{1}{2}, -\ 5, \ln ln\, 2\,, 3)$

12. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overleftrightarrow{u}, \overleftrightarrow{v})$, Soit l' équation $z^2 + 2z + 5 = 0$. $A\ et\ A'$ ont les points images des solutions de cette équation, tels que $Im(Z_A) > 0$. $B\ est\ l'image\ de\ A$ par le quart de tour direct de centre O. On a : **(1pt)**

a. $Z_B = 2 + i$

b. $Z_B =- 2 + i$

c. $Z_B =- 2 - i$

d. $Z_B = 2 - i$

13. On considère la fonction f définie sur: $x \in [0, 1[$ $telle\ que$ $f(0) = 0\ et\ f'(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}.}$. On pose: $h(x) = \sqrt{1 + x} - 2$. On a : **(1pt)**

a. $h(x) = f(x)\ sur\ [0, 1[$

b. $h(x) \leq f(x)\ sur\ [0, 1[$

c. $h(x) \geq f(x)\ sur\ [0, 1[$

d. $h'(x) \geq f'(x)\ sur\ [0, 1[$

14. Une série statistique double est donnée par le tableau suivant : **(1pt)**

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	550	580	640	850	1050	1120

Le point moyen de cette série statistique est le point :

a. $G(2, 5; 798, 33)$

b. $G(3, 5; 800)$

c. $G(4, 5; 800)$

d. $G(5; 800)$

15. f est la fonction définie par $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et α un réel tel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. On a : **(1pt)**

a. $\forall \varepsilon > 0,\ |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ *dès que* $|x| < \frac{\varepsilon}{5}$

b. $\forall \varepsilon > 0,\ |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ *dès que* $|x| < \frac{\varepsilon}{4}$

c. $\forall \varepsilon > 0,\ |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ *dès que* $|x| < \frac{\varepsilon}{3}$

d. $\forall \varepsilon > 0,\ |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ *dès que* $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$

16. Une salle de classe compte 100 élèves, dont 40 garçons et 60 filles. 50% des élèves de la classe ont plus de 15 ans et 60% desgarçons de la classe ont plus de 15 ans. On tire au sort un élève de la classe, en supposant que tous ont la même probabilité d'être choisis.

La probabilité de choisir un élève de plus de 15 ans, sachant que c'est une fille est de : **(1pt)**

a. $P = \frac{7}{30}$
b. $P = \frac{11}{30}$
c. $P = \frac{13}{30}$
d. $P = \frac{17}{30}$

17. Soit f la fonction de C *vers* C définie par $f(z) = \frac{z}{1+z+\bar{z}}$.

Le domaine de définition de f est donné par : **(1 pt)**

a. $D_f = \{Re(z) \neq 0\}$

b. $D_f = \{Re(z) \neq i\}$

c. $D_f = \left\{Re(z) \neq \frac{1}{2}\right\}$

d. $D_f = \{Im(z) \neq 0\}$

18. On considère l'équation différentielle $(E): y'' + 2y' + 5y = 0$.

Une solution particulière g *de* (E) est donnée par : **(1pt)**

a. $g(x) = e^{-x} cos(2x)$

b. $g(x) = e^{-x}cos(5x)$

c. $g(x) = e^{x}cos(2x)$

d. $g(x) = e^{x}cos(5x)$

19. Pour tout réel x strictement positif, on a : **(1pt)**

a. $\ln ln\left(\sqrt{x\ +\ 1} - \sqrt{x}\right)\ = -\ \ln ln\left(\sqrt{x\ +\ 1} + \sqrt{x}\right)$

b. $\ln ln\left(\sqrt{x\ +\ 1} - \sqrt{x}\right)\ =\ \ln ln\left(-\ \sqrt{x\ +\ 1} + \sqrt{x}\right)$

c. $\ln ln\left(\sqrt{x\ +\ 1} - \sqrt{x}\right)\ = -\ \ln ln\left(-\ \sqrt{x\ +\ 1} + \sqrt{x}\right)$

d. $\ln ln\left(\sqrt{x\ +\ 1} - \sqrt{x}\right)\ =\ \ln ln\left(\sqrt{x\ +\ 1} + \sqrt{x}\right)$

20. Soit $n \in N$. On considère l'intégrale $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{cos^{2n+1}\ t}$. On a : **(1pt)**

a. $I_0 = \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos cos\ t}{1-\sin sin\ t} + \frac{\cos cos\ t}{1+\sin sin\ t}\right) dt$

b. $I_0 = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos cos\ t}{1-\sin sin\ t} + \frac{\cos cos\ t}{1+\sin sin\ t}\right) dt$

c. $I_0 = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin sin\ t}{1-\cos cos\ t} + \frac{\sin sin\ t}{1+t}\right) dt$

d. $I_0 = \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin sin\ t}{1-\cos cos\ t} + \frac{\sin sin\ t}{1+t}\right) dt$