INSTITUT UCAC-ICAM
Concours d'entrée- juin 2020

A remplir par le candidat : Nom : ………………………………..…… Prénom : ……………………………. Centre de passage de l'examen : ………………… N° de place : ……….. Epreuve de : ………………………………………………………………………	Cadre réservé à l'Institut *N° anonyme* : ………..

.

Cadre réservé à l'Institut Note :	✓ 2nd cycle de la formation Ingenieur **Epreuve de MATHEMATIQUES**	Cadre réservé à l'Institut *N° anonyme :* ………..

Le barème est le suivant :

1 point par bonne réponse

0 point si il n'y a pas de réponse ou si la réponse est mauvaise

Les énoncés et les brouillons seront ramassés à la fin des épreuves pour être détruits.

EXERCICE 1 : 6pts

Soit $f f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^3$dans $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^3$, dont la représentation matricielle dans la base canonique est donnée par la matrice A A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1- Calculer le polynôme caractéristique de AA. **(1 pt)**

i) $\boldsymbol{P(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-1)P(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-1)^2}$

ii) $\boldsymbol{P(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-1)P(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-1)^2}$

iii) $\boldsymbol{P(\lambda) = (3+\lambda)(\lambda+1)P(\lambda) = (3+\lambda)(\lambda+1)^2}$

2- Trouver les valeurs propres de AA **(1 pt)**

i) $\boldsymbol{\lambda = -1, \quad \lambda = 3\lambda = -1, \quad \lambda = 3}$

ii) $\boldsymbol{\lambda = 1, \quad \lambda = 3\lambda = 1, \quad \lambda = 3}$

iii) $\boldsymbol{\lambda = -1, \quad \lambda = -3\lambda = -1, \quad \lambda = -3}$

3- Pour chaque valeur propre, déterminer le sous-espace propre correspondant. On donnera une base de chaque sous-espace propre. **(1 pt)**

i) E_3 sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est la droite vectorielle engendrée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base est donnée par la famille formée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. E_1 sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base est donnée par la famille formée par e_2 et e_3

ii) E_{-3} sous-espace propre associé à la valeur propre -3 est la droite vectorielle engendrée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base est donnée par la famille formée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. E_{-1} sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base est donnée par la famille formée par e_2 et e_3

4- Montrer que la matrice AA est diagonalisable, et proposer une base $B\ B$ de vecteurs propres. **(1,5 pt)**

i) La matrice A admet deux valeurs propres (une simple qui est 3 et une double qui est -1). La multiplicité géométrique de la valeur propre -1 est égale à 2=dimA donc on peut conclure que la matrice est diagonalisable. Une base ***B*** de vecteurs propres est $\{e_1, e_2, e_3\}$.

ii) La matrice A admet deux valeurs propres (une simple qui est -3 et une double qui est -1). La multiplicité arithmétique de la valeur propre -1 est égale à 2 donc on peut conclure que la matrice est diagonalisable. Une base ***B*** de vecteurs propres est $\{e_1, e_2, e_3\}$.

iii) La matrice A admet deux valeurs propres (une simple qui est 3 et une double qui est 1). La multiplicité géométrique de la valeur propre 1 est égale à 2 donc on peut conclure que la matrice est diagonalisable. Une base ***B*** de vecteurs propres est $\{e_1, e_2, e_3\}$.

5- Ecrire la matrice Diagonale $D\ D$ qui représente la matrice de ff dans la base $B\ B$. Donner la matrice de passage, notéePP, de la base canonique à la base BB trouvée à la question précédente, et donner une relation entre $A, P\ et\ D. A, P\ et\ D.$ **(1,5 pt)**

i) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ P $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ A=PDP^{-1}

ii) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ P $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A=PDP^{-1}

iii) $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ P $= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A=PDP^{-1}

<u>EXERCICE</u> 2 : 5pts

Soient les fonctions définies par:

a) $f(x,y) = \ln(y-x^2)\, f(x,y) = \ln(y-x^2)$

b) $g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

1- Lesquelles des fonctions ci-dessus sont harmoniques ? **(0,5 pt)**

i)) La fonction f ii) La fonction g iii) Les fonctions f et g

2- Soit $\vec{G}(x,y,z) = (x^2 - e^y,\ sinz,\ y^2+z)\vec{G}(x,y,z) = (x^2 - e^y,\ sinz,\ y^2+z)$:

a) Calculer $div\vec{G}div\vec{G}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{G}.\overrightarrow{rot}\vec{G}$. **(1 pt)**

i) $div\vec{G}div\vec{G}$= 2x+1, $\overrightarrow{rot}\vec{G}\overrightarrow{rot}\vec{G}$= (2y-cosz, 0, e^y).

ii) $div\vec{G}div\vec{G}$= 2x+cosz+2y, $\overrightarrow{rot}\vec{G}\overrightarrow{rot}\vec{G}$= (2y-cosz, 1, e^y).

a)

b) Déterminer la Jacobienne de $\vec{G}\vec{G}$. **(1 pt)**

i) J_G= -2xycosz

ii) J_G= 2xycosz

iii) J_G= -2xycosy

3- On donne le champ vectoriel $\vec{V}(x,y,z) = (y^2cosx, 2ysinx + e^{2z}, 2ye^{2z})$ $\vec{V}(x,y,z) = (y^2cosx, 2ysinx + e^{2z}, 2ye^{2z})$

a) Montrer que ce champ est un champ de gradient. **(0,5 pt)**

i) Il suffit de montrer que son rotationnel est égale à 0

ii) Il suffit de montrer que sa divergence est nulle

iii) Il suffit de montrer que son rotationnel est égale au vecteur nul

b)

b) Déterminer le potentiel $U(x,y,z)U(x,y,z)$ dont dérive ce champ sachant qu'il vaut 1 à l'origine. **(1 pt)**

i) $U(x,y,z)U(x,y,z)$=y^2sinx +ye^{2z}+ 1

ii) $U(x,y,z)U(x,y,z)$=y^2sinx +ye^{-2z}+ 1

iii) $U(x,y,z)U(x,y,z)$=y^2sinx + y^2e^{2z}+ 1

c) Quelle est la circulation de ce champ de $A(0,1,0)A(0,1,0)$ à B($\frac{\pi}{2}$, 3,0) ($\frac{\pi}{2}$, 3,0) ? **(1 pt)**

i) $C_{AB}(V)=11$

ii) $C_{AB}(V)=10$

iii) $C_{AB}(V)=12$

EXERCICE 3 : 3pts

1- Résoudre dans ℂ ℂ l'équation suivante : $(E): Z^2 - (3+4i)Z - 1 + 5i = 0$ $(E): Z^2 - (3+4i)Z - 1 + 5i = 0$ **(1 pt)**

i) S = {-1+i, -2+3i}

ii) S = {-1+i, 2-3i}

iii) S = {-1+i, 2+3i}

2- Calculer les intégrales suivantes : **(2 x 1pt)**

$a)\ \int_1^e \frac{lnx}{x}\,dx$,$a)\ \int_1^e \frac{lnx}{x}\,dx$,

i) -1/2

ii) 1/3

iii) 1/2

$b)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+3)\,cosx\,dx$$b)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+3)\,cosx\,dx$

i) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\frac{\pi\pi}{22}+\sqrt{3}\ \frac{5}{2}\sqrt{3}\ \frac{5}{2}+2$

ii) $\sqrt{3}\sqrt{3}\,\frac{\pi\pi}{22}+\sqrt{3}\ \frac{5}{2}\sqrt{3}\ \frac{5}{2}-2$

iii) $-\sqrt{3}\sqrt{3}\,\frac{\pi\pi}{22}+\sqrt{3}\ \frac{5}{2}\sqrt{3}\ \frac{5}{2}-2$

EXERCICE 4 : 6pts

1- Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant la transformée de Laplace : **(2 x 1 pt)**

a) $\begin{cases} y' = 2y + 2xe^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$\begin{cases} y' = 2y + 2xe^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

i) $y(x)=(x^2+1)e^{2x}$ ii) $y(x)=(x^2-1)e^{2x}$ iii) $y(x)= -(x^2+1)e^{2x}$

b) $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = e^{-x}sin2x \\ y(0) = 0\ et\ y'(0) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = e^{-x}sin2x \\ y(0) = 0\ et\ y'(0) = 1 \end{cases}$

i) $y(x)=\frac{21}{40}\exp(t)\sin(2t)\,\frac{21}{40}\exp(t)\sin(2t)$ ii) $y(x)=\frac{21}{40}\exp(t)\sin(-2t)\,\frac{21}{40}\exp(t)\sin(-2t)$ iii) $y(x)=\frac{21}{40}\exp(-t)\sin(2t)$ $\frac{21}{40}\exp(-t)\sin(2t)$

2- On considère la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X^2(X^2+1)}$

$F(X) = \frac{1}{X^2(X^2+1)}$

a. Décomposer FF en éléments simples et en déduire la valeur de l'intégrale définie $\int_1^{\sqrt{3}} F(t)\,dt \int_1^{\sqrt{3}} F(t)\,dt$ **(1 pt)**

i) $F(X) = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+1} F(X) = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+1},$

$\int_1^{\sqrt{3}} F(t)dt = 1 - \int_1^{\sqrt{3}} F(t)dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{12}\frac{\pi}{12}$

ii) $F(X) = -\frac{1}{X^2} + \frac{1}{X^2+1}$ ii) $F(X) = -\frac{1}{X^2} + \frac{1}{X^2+1},$ $\int_1^{\sqrt{3}} F(t)dt = -1 +$

$\int_1^{\sqrt{3}} F(t)dt = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{12}\frac{\pi}{12}$

iii) $F(X) = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+1}$ iii) $F(X) = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+1},$ $\int_1^{\sqrt{3}} F(t)dt = 1 -$

$\int_1^{\sqrt{3}} F(t)dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}\frac{\pi}{12}$

b. Déduire également de cette décomposition les originaux respectifs (dans la transformation de Laplace) de F et $G F$ et G avec : **(1 pt)**

$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)} F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$ et $G(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p^2+2p+2)} G(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p^2+2p+2)}$

i) f(t)= t – sint et g(t)=e^{t} f(t)

ii) f(t)= -t + sint et g(t)=e^{-t} f(t)

iii) f(t)= t – sint et g(t)=e^{-t} f(t)

c. Retrouver d'une autre façon l'original de $p \to F(p)$ $p \to F(p)$ en utilisant le produit de convolution. **(2 pt)**

i) F(p)=L(t * sint)(p) et f(t)= $\int_0^t (t-x)\sin x\,dx$

$\int_0^t (t-x)\sin x\,dx$

ii) F(p)=L(t * cost)(p) et f(t)= $\int_0^t (t-x)\cos x\,dx$

$\int_0^t (t-x)\cos x\,dx$

iii) F(p)=L(t * tant)(p) et f(t)= $\int_0^t (t-x)\tan x\,dx$

$\int_0^t (t-x)\tan x\,dx$